قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

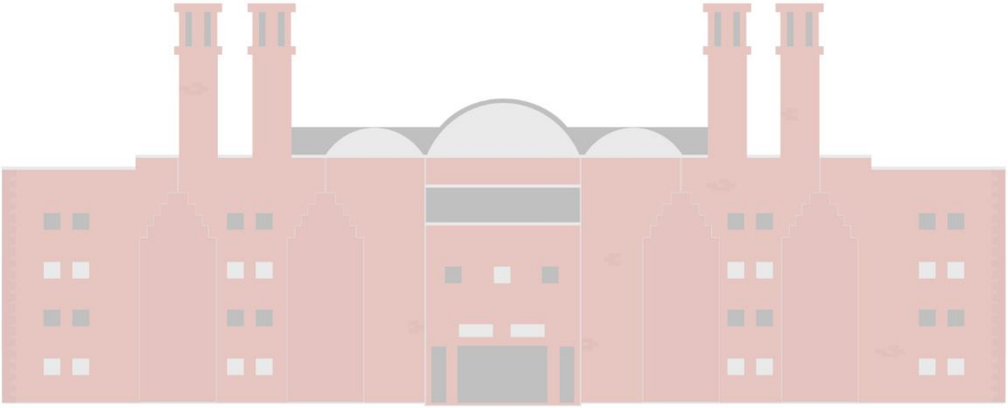
السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التَحليل العَددِي

المحاضرة الثاني عشر

4 صفحات



الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١١/١١

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

من المثال في المحاضرة السابقة:

$$\begin{cases} v - u^3 = 0 \\ u^2 + v^2 - 1 = 0 \\ x_0 = (1,2) \end{cases}$$

لحساب المصفوفة اليعقوبية

$$DF(X) = \begin{bmatrix} -3u^2 & 1 \\ 2u & 2v \end{bmatrix}$$

ولدينا القانون التالي لمعرفة الحل S:

$$DF(X_0).S = -F(X_0) \dots\dots\dots *$$

ولدينا:

$$F(x) = \begin{bmatrix} v - u^2 \\ u^2 + v^2 - 1 \end{bmatrix}$$

نعوض في *

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

وبما أن ال x_0 معطاة فيمكننا حساب ال x_1 من خلال القانون التالي:

$$X_1 = X_0 + S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

نعتبر x_1 تخمين أول للحل.

$$x_2 = ?$$

$$DF(X_1).S = -F(X_1)$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.s = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow s = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$X_2 = X_1 + S = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

rbd
لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

k	u_k	v_k
0	1.0 … .0	2.0 … .0
1	1.0 … .0	1.0 … .0
2	0.875	0.625
:	:	:
5	0.82603135773241	0.56362416213163
6	0.82603135765419	0.56362416216126
7	0.82603135765419	0.56362416216126

ونبقى نأخذ القيم حتى يتحقق الشرط : $||x_{k+1} - x_k|| < \varepsilon$

خصائص القيمة المطلقة :

$$|x| = abs(x) = \begin{cases} x : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

$$abs = |\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$$

$$x \to |x|$$

١) $|x| \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

٢) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

٣) $|\alpha x| = |\alpha|.|x| : \alpha \in \mathbb{R}$

٤) $|x + y| \leq |x| + |y|$

النظيم norm :

$$||\ \ || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||$$

نقول عن التابع إنه نظيم إذا تحققت الشروط التالية :

١) $||\boldsymbol{x}|| \geq \mathbf{0}$(قيمة)

٢) $||\boldsymbol{x}|| = \mathbf{0}$(قيمة) $\Leftrightarrow x = O$(شعاع)

٣) $||\alpha x|| = ||\alpha||.||x|| : \forall \alpha \in \mathbb{R}$

٤) $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|| \leq ||\boldsymbol{x}|| + ||\boldsymbol{y}||$

إن الشكل التالي $||x|| = \sum_{i=1}^{n} x^2\ i$ حيث أن X هي مصفوفة : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

هو تابع نظيم لإنه يحقق الشروط السابقة

وبذلك يمكننا أن نعود إلى شرط التوقف بالمثال السابق ويمكن أن نعتبر شرط التوقف

$||F(x_n)|| < \delta$

مثال : لو كان لدينا الجملة التالية :

$$\boldsymbol{f_1(u,v) = 6u^3 + uv - 3v^3 - 4 = 0}$$

$$\boldsymbol{f_2(u,v) = u^2 - 18uv^2 + 16v + 1 = 0}$$

أوجد حل هذه الجملة عند $(u_0, v_0) = (2,2)$ باستخدام طريقة نيوتن .

ملاحظة : بالتجريب نجد أن الحل الفعلي هو $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{1},\boldsymbol{1})$

الحل :

نمضي بالحل حتى نصل للخطوة الخامسة فنجد أن

$$\boldsymbol{x_5} = \begin{cases} \boldsymbol{u_5 = 1.00000000111957} \\ \boldsymbol{v_5 = 1.000000000057894} \end{cases}$$

نجد أن القيم تقترب من الحل الفعلي

مثال أخر :

$$\begin{cases} \boldsymbol{e^x + e^y = 0} \\ \boldsymbol{ln(1+x+y) = 0} \end{cases}$$

بالتجريب نجد أن الحل الفعلي هو : $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

أما بطريقة نيوتن إذا تم إعطاء $\boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_0 = \frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{y_0 = \frac{1}{2}} \end{pmatrix}$

نوجد صيغة نيوتن التكرارية $\boldsymbol{x_{k+1} = x_k - DF(x_k)^{-1}.F(x_k)}$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} e^{x_k} & -e^{y_k} \\ \frac{1}{1+x_k+y_k} & \frac{1}{1+x_k+y_k} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e^{x_k} - e^{y_k} \\ ln(1+x_k+y_k) \end{bmatrix} \\ k = 0,1,2,3,\dots. \end{cases}$$

k	x_k	y_k
0	0.5	0.5
1	−0.193147	−0.193147
2	−0.043329	−0.043329
⋮	⋮	⋮

لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

5	$-1.40 * 10^{-11}$	$-1.40 * 10^{-11}$

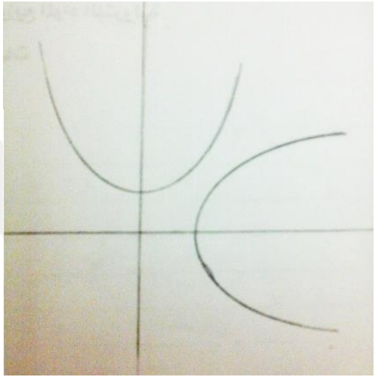
تقارب الحل من $(\mathbf{0},\mathbf{0})$

ملاحظة

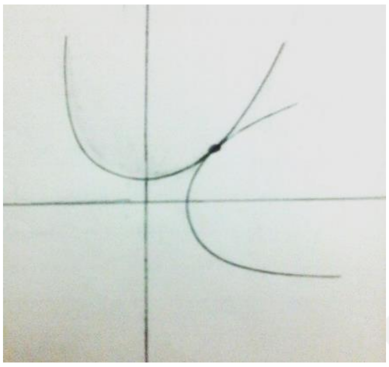
إن حلول الجملة التالية تتغير بتغير قيمة ال δ

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 + \delta \\ -x_1 + x_2^2 + \delta \end{cases}$$

إذا كانت $\delta = 0.5$ فإن الجملة لا تملك حلول .

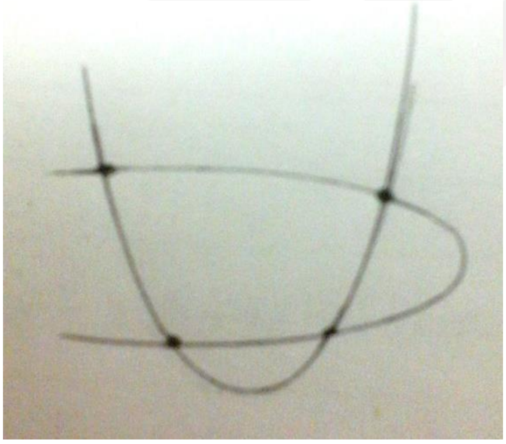


و إذا كانت $\delta = 0.25$ فإن الجملة لها حلان كما في الشكل ادناه



اذا كانت $\delta = -1.0$ فإن الجملة لها أربعة حلول

كما في الشكل المجاور :



ملاحظة :يمكن لطريقة نيوتن من أجل معادلة بمتغير وحيد أن توصلنا إلى الجذور العقدية شريطة أن تكون شروط البدء فيها عقدية

"Have more than you show,

Speak less than you know"

William Shakespeare